1

තාත්වික සංඛ්‍යා

මෙම පාඩම ඉගෙනීමෙන් ඔබට,

- සංඛ්‍යා කුලක විශ්ලේෂණය කිරීමට
- කරණි ආශ්‍රිත ව මූලික ගණිත කර්ම හැසිරවීමට

හැකියාව ලැබෙනු ඇත.

1.1 සංඛ්‍යා වර්ගීකරණය

සංඛ්‍යා පිළිබඳ සංකල්පය මානව වර්ගයා තුළ ජනිත වූයේ මීට වසර 30 000කට පමණ පෙර යැයි විශ්වාස කෙරේ. විවිධ ශිෂ්ටාචාර තුළ ස්වාධීන ව උත්පත්තිය හා වර්ධනය සිදු වූ මෙම සංකල්පය මුළු ලොව පුරා විකසනය වී, අද වන විට 'ගණිතය' නමැති පොදු විශ්වීය විෂය ක්ෂේත්‍රයක් බවට පත් ව ඇත.

මුල් අවධියෙහි දී ශිෂ්ටාචාර තුළ සංඛ්‍යා යොදා ගන්නට ඇත්තේ ගණන් කිරීම හා ගණන් තැබීම වැනි සරල කටයුතු සඳහා යැයි සිතිය හැකි ය. මුලින් ම පහළ වූ සංඛ්‍යාමය සංකල්ප "එක" හා "දෙක" බවට සැක නැත. ඉන් පසු එය, "තුන", "හතර" යනාදි ලෙස වර්ධනය වන්නට ඇත. මේ ආකාරයට තමන් "කැමති ප්‍රමාණයක්" නම් කිරීමට හැකි බව ද පසු කලෙක දී අවබෝධ කර ගන්නට ඇත. මෙම නම් කිරීම සඳහා විවිධ ශිෂ්ටාචාර තුළ විවිධ සංකේත යොදාගැනිණි.

ඓතිහාසික සාක්ෂි අනුව, අද අප භාවිත කරන 1, 2, 3 ආදි සංඛ්‍යාංක භාවිතයෙහි ආරම්භය ඉන්දියාව ලෙස පිළිගැනේ. එපමණක් නොව, ශූන්‍යය නමැති සංකල්පය සංඛ්‍යාවක් ලෙස භාවිත කිරීමේත් ස්ථානීය අගය මත පදනම් වූ සංඛ්‍යා පද්ධතියක් නිර්මාණය කිරීමේත් ගෞරවය ඉන්දියාවට හිමි වේ. මෙම සංඛ්‍යා පද්ධතිය හින්දු - අරාබි සංඛ්‍යා පද්ධතිය ලෙස අද හැඳින්වෙන අතර එහි භාවිතය වෙළෙඳුන් මාර්ගයෙන් මැද පෙරදිගටත්, එතැනින් යුරෝපයටත් පැතිරුණු බව නූතන පිළිගැනීම යි. වර්තමානය වන විට මෙම සංඛ්‍යා පද්ධතිය සම්මත පොදු සංඛ්‍යා පද්ධතිය ලෙස මුළු ලොවෙහි ම පිළිගැනේ.

සංඛ්‍යා භාවිතයට අදාළ ව මිනිස් පරිණාමයේ සිදු වූ මහත් පෙරළියක් ලෙස, සංඛ්‍යා භාවිතයෙන් මූලික ගණිත කර්ම සිදු කිරීම (එකතු කිරීම, අඩු කිරීම, ගුණ කිරීම හා බෙදීම) දැක්විය හැකි ය. අද වැනි තාක්ෂණික ලෝකයක සංඛ්‍යා හා ඒ මත සිදු කෙරෙන ගණිත කර්මවලින් තොර මානව පැවැත්මක් පිළිබඳ සිතා ගැනීමට පවා අසීරු ය.

මානව අවශ්‍යතා සඳහා මුලින් ම යොදා ගැනුණු සංඛ්‍යා ලෙස 1, 2, 3 යනාදිය දැක්විය හැකි වුවත් පසු කලෙක දී ශූන්‍යය, භාග සංඛ්‍යා හා සෘණ සංඛ්‍යා ද ඊට ඇතුළත් විය. ගණිතය වෙනම ම විෂයක් ලෙස දියුණු වෙමින් පවතින කාලයේ දී තවත් විවිධාකාරයේ සංඛ්‍යා වර්ග (කුලක) පිළිබඳව ගණිතඥයන්ගේ අවධානය යොමු විය. මෙම පාඩම තුළ දී අප බලාපොරොත්තු වන්නේ එවැනි විවිධ සංඛ්‍යා කුලක පිළිබඳවත් ඒවායේ අංකන ක්‍රම හා ගුණ පිළිබඳවත් ඉගෙනීමට ය.

නිඛිල කුලකය ($\mathbb{Z}$)

ස්වභාවයෙන් ම, අප මුලින් ම හඳුනාගන්නේ 1, 2, 3, ... ලෙස අප කුඩා කල මුලින් ම ඉගෙනගත් සංඛ්‍යා ය. මෙම සංඛ්‍යා **ගණිත සංඛ්‍යා** ලෙස හැඳින්වෙන අතර, ඒවා සියල්ල අඩංගු කුලකය, කුලක අංකනයෙන් මෙසේ ලියනු ලැබේ.

$$\{1, 2, 3, ...\}$$

ගණිත සංඛ්‍යා යන නම ලැබීමට හේතුව ඉතා පැහැදිලි ය. එසේ නමුත්, නූතන ගණිත ව්‍යවහාරයේ මෙම නම භාවිත වන්නේ විරල වශයෙනි. මෙම කුලකය සඳහා බොහෝ විට භාවිත වන නම වන්නේ "**ධන නිඛිල කුලකය**" යන්න යි. එම කුලකය $\mathbb{Z}^+$ මගින් අංකනය කෙරේ. එනම්,

$$\mathbb{Z}^+ = \{1, 2, 3, ...\}$$

මේ අනුව, 1, 2, 3, ... සංඛ්‍යාවලට ධන නිඛිල යැයි කියනු ලැබේ.

සෘණ නිඛිල ලෙස අර්ථ දැක්වෙන්නේ $-1, -2, -3, ...$ ආදි සංඛ්‍යා ය. මෙම කුලකය අංකනය කිරීම සඳහා සුලභව යෙදෙන සංකේතයක් නොමැති වුවත් සමහර ගණිතඥයන් විසින්, තම විෂය ක්ෂේත්‍රයේ අවශ්‍යතා අනුව, ඒ සඳහා $\mathbb{Z}^-$ යන සංකේතය භාවිත කෙරේ.

නිඛිල ලෙස හැඳින්වෙන්නේ ධන නිඛිල, ශූන්‍යය හා සෘණ නිඛිල යන සියලු සංඛ්‍යා ය. එම කුලකය $\mathbb{Z}$ මගින් අංකනය කෙරේ. මේ අනුව,

$$\mathbb{Z} = \{ ..., -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, ...\}$$

ලෙස හෝ

$$\mathbb{Z} = \{0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, ...\}$$

ලෙස අංකනය කළ හැකි ය.

ප්‍රකෘති සංඛ්‍යා කුලකය ($\mathbb{N}$)

මීළඟට අප නැවතත් 1, 2, 3, ... ආදි වශයෙන් වූ සංඛ්‍යා කුලකය සලකමු. මෙම සංඛ්‍යා කුලකය **ප්‍රකෘති සංඛ්‍යා** කුලකය ලෙස ද හැඳින්වෙන අතර, එය $\mathbb{N}$ මගින් අංකනය කෙරේ. එනම්,

$$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, ...\}.$$

සටහන: ප්‍රකෘති සංඛ්‍යා ලෙස සලකනු ලබන්නේ කුමන සංඛ්‍යා දැයි යන්න පිළිබඳව ගණිතඥයන් අතර පොදු එකඟතාවක් නොමැත. ප්‍රකෘති යන්නෙහි අදහස "ස්වාභාවික" යන්න යි; ඒ අනුව, ප්‍රකෘති සංඛ්‍යා යන යෙදුම 1, 2, 3, ... ආදි සංඛ්‍යා සඳහා යෝග්‍ය

බව පෙනේ. එහෙත්, සමහර ගණිතඥයන් විසින් (විශේෂයෙන්, කුලකවාදය පිළිබඳ විශේෂඥයන්) තම පොත්පත්වල, යම් හේතුන් නිසා, 0 ද ප්‍රකෘති සංඛ්‍යාවක් ලෙස සලකන ලදි. ශූන්‍ය හා ධන නිඛිල අඩංගු කුලකය අංකනය කිරීම සඳහා ඒ වන විට පිළිගත් නමක් හා සංකේතයක් නොතිබීම ද එයට හේතු වූවා විය හැකි ය. එහෙත් සංඛ්‍යාවාදය පිළිබඳ ව ලියැවුණු පොත්වල බොහෝ විට ප්‍රකෘති සංඛ්‍යා ලෙස 1, 2, 3, ... සංඛ්‍යා කුලකය සලකන බව පෙනේ. කෙසේ නමුත්, අද කාලයේ ලියැවෙන සෑම පොතපතක ම පාහේ කර්තෘන් විසින් තමන් ප්‍රකෘති සංඛ්‍යා ලෙස සලකනු ලබන්නේ කුමන සංඛ්‍යා ද යන්න මුලින් ම සඳහන් කෙරේ.

පරිමේය සංඛ්‍යා කුලකය ($\mathbb{Q}$)

නිඛිල මෙන් ම භාග ද සංඛ්‍යා ලෙස සැලකිය හැකි බවත් භාග සඳහා ද එකතු කිරීම, ගුණ කිරීම ආදී ගණිත කර්ම සිදු කළ හැකි බවත් අපි දැක ඇත්තෙමු. සෑම නිඛිලයක් ම ද භාග සංඛ්‍යාවක් ලෙස ලිවිය හැකි ය (නිදසුනක් ලෙස $2=\frac{2}{1}$ ලෙස ලිවිය හැකි ය). එසේ ම, එක ම සංඛ්‍යාත්මක අගය සහිත භාග වෙනස් ආකාරවලින් ලිවිය හැකි ය (නිදසුනක් ලෙස $\frac{1}{2}=\frac{2}{4}=\frac{3}{6}$). සෘණ භාග ද අපි දැක ඇත්තෙමු ($-\frac{2}{5}$, $-\frac{11}{3}$ ආදිය). අප සාමාන්‍යයෙන් භාග සංඛ්‍යාවක හරයේ හා ලවයේ නිඛිල තිබිය යුතු යැයි සිතා සිටියත් එය එසේ නොවේ. නිදසුනක් ලෙස, $\frac{3}{\sqrt{2}}$ යන්න ද භාග සංඛ්‍යාවකි. එහෙත්, හරයේ හා ලවයේ **නිඛිල සහිත භාග** (හරයේ 0 නොමැති විට) ගණිතයේ දී විශේෂ වැදගත්කමක් ගන්නා අතර, එම සංඛ්‍යා **පරිමේය සංඛ්‍යා** ලෙස හැඳින්වේ. එම සංඛ්‍යා කුලකය $\mathbb{Q}$ මගින් අංකනය කෙරේ. කුලක ජනන ආකාරය යොදා ගනිමින්, පරිමේය සංඛ්‍යා කුලකය මෙසේ අර්ථ දැක්විය හැකි ය:

$$\mathbb{Q}=\left\{ \frac{a}{b} : a, b \in \mathbb{Z} \text{ හා } b \neq 0 \right\}.$$

පරිමේය සංඛ්‍යා කුලකය අර්ථ දැක්විය හැකි තවත් ආකාර ද පවතී. ඉන් එක් ආකාරයක් නම්,

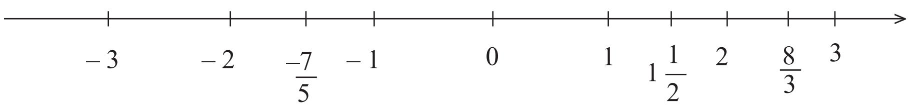
$$\mathbb{Q}=\left\{ \frac{a}{b} : a \in \mathbb{Z}, b \in \mathbb{Z}^{+} \right\}.$$

මෙම අර්ථ දැක්වීම් දෙක ම එකිනෙකට තුල්‍ය වේ. එයට හේතුව (පරිමේය සංඛ්‍යාවක හරයේ 0 තිබිය නොහැකි නිසාත්, සෘණ පරිමේය සංඛ්‍යා සියල්ල ලවයේ සෘණ නිඛිලවලින් ලැබෙන නිසාත් ය.

අපරිමේය සංඛ්‍යා කුලකය (Q')

දැන්, අපරිමේය සංඛ්‍යා යනු මොනවාදැයි හඳුනා ගනිමු. අප මීට ඉහත වසරවල දී සංඛ්‍යා රේඛාවක් ඇඳ සංඛ්‍යා පිළිබඳ ඉගෙනගත් ආකාරය ඔබට මතක ද? ඒ පිළිබඳ ව නැවතත් මතක් කර ගනිමු.

දෙපසට ම අවශ්‍ය තරම් දික් කළ හැකි සරල රේඛාවක් සලකමු. එම රේඛාව මත කැමති ලක්ෂ්‍යයක් 0 ලෙස නම් කරමු. එම 0න් එක් පසක (සාමාන්‍යයෙන් දකුණු පසින්) සමාන දුරින් $1, 2, 3, \ldots$ ආදි සියලු ධන නිඛිලවලට අදාළ ලක්ෂ්‍යත් අනෙක් පස $-1, -2, -3, \ldots$ ආදි සියලු ඍණ නිඛිලවලට අදාළ ලක්ෂ්‍යත් ලකුණු කර ඇතැයි සිතමු. එනම්, නිඛිල සියල්ල මෙම රේඛාව මත ලක්ෂ්‍යවලින් දක්වා ඇත. ඉන් පසු සියලු පරිමේය සංඛ්‍යාවලට අදාළ ලක්ෂ්‍ය ද මෙම රේඛාව මත ලකුණු කළේ යැයි සිතමු. පහත රූපයේ එසේ ලකුණු කළ ලක්ෂ්‍ය ගණනාවක් දැක්වේ.



ඒ අනුව, මෙම රේඛාව මත සියලු පරිමේය සංඛ්‍යා (නිඛිල ද ඇතුළුව) ලකුණු කොට අවසන්ව ඇත. දැන් රේඛාව මත සෑම ලක්ෂ්‍යයකට ම අනුරූප සංඛ්‍යාවක් ලකුණු වී ඇතැයි ඔබ සිතනවා ද? වෙනත් අයුරකින් ඇසුව හොත්, රේඛාව ඔස්සේ 0 සිට ඇති සෑම දුරක් ම පරිමේය සංඛ්‍යාවක් ලෙස ලිවිය හැකි යැයි ඔබ සිතනවා ද? ඇත්ත වශයෙන් ම තවත් ලක්ෂ්‍ය ලකුණු නොවී ඉතිරි වී ඇත. එනම්, පරිමේය සංඛ්‍යාවකින් නිරූපණය කළ නොහැකි ලක්ෂ්‍ය (සංඛ්‍යා) ද මෙම රේඛාව මත ඉතිරි වී ඇත. මෙම ලකුණු නොවී ඉතිරි වූ ලක්ෂ්‍ය වන්නේ, a හා b නිඛිල වන, $\frac{a}{b}$ ආකාරයෙන් ලිවීමට **නොහැකි** ලක්ෂ්‍ය බව පැහැදිලි ය. එසේ ලකුණු නොවී ඉතිරි වූ ලක්ෂ්‍ය (සංඛ්‍යා) **අපරිමේය සංඛ්‍යා** ලෙස හැඳින්වේ.

අපරිමේය සංඛ්‍යා කුලකය නිරූපණය කිරීම සඳහා වෙන ම සංකේතයක් නොමැති අතර, එය සාමාන්‍යයෙන් $\mathbb{Q}$ හි අනුපූරක කුලකය වන $\mathbb{Q}'$ මගින් දැක්වේ.

අපරිමේය සංඛ්‍යා සඳහා උදාහරණ ලෙස, $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, $\sqrt{5}$ යනාදි සංඛ්‍යා දැක්විය හැකි ය.

ඇත්ත වශයෙන් ම පූර්ණ වර්ගයක් නොවන ඕනෑ ම ධන නිඛිලයක වර්ගමූලය අපරිමේය සංඛ්‍යාවක් වේ. මේ හැර, ඕනෑ ම වෘත්තයක පරිධිය එහි විෂ්කම්භයට දරන අනුපාතය වන π යන්න ද අපරිමේය සංඛ්‍යාවක් බව ගණිතඥයන් විසින් ඔප්පු කර ඇත. π හි අගය $\frac{22}{7}$ ලෙස ගනු ලබන්නේ ගණනය කිරීමේ පහසුව තකා ආසන්න අගයක් ලෙස ය.

තාත්වික සංඛ්‍යා කුලකය ($\mathbb{R}$)

ඉහත සාකච්ඡාවට අනුව, සංඛ්‍යා රේඛාව මත පිහිටි සියලු ලක්ෂ්‍ය පරිමේය සංඛ්‍යා හෝ අපරිමේය සංඛ්‍යා ලෙස නිරූපණය කළ හැකි ය. මෙම පරිමේය හා අපරිමේය සංඛ්‍යා සියල්ලම, එනම් රේඛාව මත පිහිටි ලක්ෂ්‍ය (සංඛ්‍යා) සියල්ලටම පොදුවේ **තාත්වික සංඛ්‍යා** යැයි කියනු ලැබේ. එම තාත්වික සංඛ්‍යා කුලකය $\mathbb{R}$ මගින් අංකනය කෙරේ.

සංඛ්‍යාවක දශම නිරූපණය

ඕනෑ ම තාත්වික සංඛ්‍යාවක් දශම නිරූපණයක් ලෙස දැක්විය හැකි ය. මුලින් ම, නිදසුනක් ලෙස පරිමේය සංඛ්‍යා කිහිපයක දශම නිරූපණය බලමු.

1. පරිමේය සංඛ්‍යාවක දශම නිරූපණය

$$4 = 4.000\ ...$$

$$\frac{1}{2} = 0.5 = 0.5000\ ...$$

$$\frac{11}{8} = 1.375 = 1.375000\ ...$$

$$\frac{211}{99} = 2.131313...$$

$$\frac{767}{150} = 5.11333...$$

$$\frac{37}{7} = 5.285714285714285714\ ...$$

මෙම දශම නිරූපණවලට ඇති පොදු ගුණයක් නම් දශම තිතෙන් යම් අවස්ථාවකට පසු (හෝ මුල සිට ම) එක ම සංඛ්‍යාංක ඛණ්ඩයක් (හෝ එක් සංඛ්‍යාංකයක්) සමාවර්තනය වීම යි.

සමාවර්තනය වීම යනු සම දුරින් නැවත නැවත යෙදීම යි.

නිදසුන් ලෙස, 4 හි 0 සංඛ්‍යාංකය පළමු දශමස්ථානයේ සිට ම සමාවර්තනය වේ; $\frac{1}{2}$ හි දශම නිරූපණයෙහි 0 සංඛ්‍යාංකය දෙවන දශමස්ථානයේ සිට සමාවර්තනය වේ; $\frac{211}{99}$ හි 13 සංඛ්‍යාංක ඛණ්ඩය මුල සිට ම සමාවර්තනය වේ; $\frac{37}{7}$ හි 285714 සංඛ්‍යාංක ඛණ්ඩය මුල සිට ම සමාවර්තනය වේ. මෙම ගුණය, එනම්: යම් සංඛ්‍යාංක ඛණ්ඩයක් (හෝ කට්ටියක්) අඛණ්ඩව සමාවර්තනය වීම සෑම පරිමේය සංඛ්‍යාවකට ම පොදු ගුණයකි. මෙසේ සමාවර්තනය වන කොටස 0 නම්, එවැනි දශම **අන්ත දශම** ලෙස හැඳින්වෙන අතර, සමාවර්ත වන කොටස 0 නොවන දශම **සමාවර්ත දශම** ලෙස හැඳින්වේ. ඒ අනුව ඉහත නිදසුනේ ඇති 4, $\frac{1}{2}$ හා $\frac{11}{8}$ **අන්ත දශම** වන අතර, අනෙක්වා සියල්ල **සමාවර්ත දශම** වේ.